**Άσκηση 1.** Να αποδειχθεί διανυσματικά ότι:

$\alpha$) Η διάμεσος τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των δύο βάσεών του.
$\beta$) Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.
$\gamma$) Τα ύψη ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

**Άσκηση 2.** Έστω τυχόν τρίγωνο $AB\Gamma$ και θεωρούμε τις διαμέσους $AM_1$ και $BM_2$ αυτού. Αν $M$ το σημείο τομής των διαμέσων $AM_1$ και $BM_2$, να αποδείξετε διανυσματικά ότι:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_1} \text{ και } \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_2}.$$

**Άσκηση 3.** Έστω τυχόν τρίγωνο $AB\Gamma$ και θεωρούμε τη διάμεσο $B\Delta$ αυτού. Θεωρούμε την ευθεία που διέρχεται από την κορυφή $A$ του τριγώνου, το μέσο $E$ της διαμέσου $B\Delta$ και τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο $Z$. Να αποδείξετε διανυσματικά ότι:

$$\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\overrightarrow{BZ} \text{ και } \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{EZ}.$$

**Άσκηση 4.** Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, για τα οποία γνωρίζουμε ότι αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^3$. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\beta} \times \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{\gamma} \times \overrightarrow{\alpha}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και να συμπεράνετε ότι αποτελούν μία νέα βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

**Άσκηση 5.** Θεωρούμε μοναδιαία διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, για τα οποία γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$ είναι κάθετο με τα διανύσματα $\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$. Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$\left(\left(\left(\left(\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}\right) \times \overrightarrow{\beta}\right) \times \overrightarrow{\beta}\right) \times \overrightarrow{\beta}\right) \cdot \overrightarrow{\gamma}$$

**Άσκηση 6.** Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0}$. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα.

Στη συνέχεια θεωρούμε διάνυσμα $\overrightarrow{\delta} \in \mathbb{R}^3$ το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο των $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$. Να αποδειχθεί ότι:

$$(\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}) \times (\overrightarrow{\gamma} \times \overrightarrow{\delta}) = \overrightarrow{0}.$$

**Άσκηση 7.** Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma} \in \mathbb{R}^3$. Να δειχθεί ότι:

$$(\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}) \times \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\alpha} \times (\overrightarrow{\beta} \times \overrightarrow{\gamma}) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\gamma}) \times \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{0}.$$

**Άσκηση 8.** Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (1, 1, -1), \overrightarrow{\beta} = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Να υπολογιστεί η παράσταση

$$\left(\left(\left(\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}\right) \times \overrightarrow{\beta}\right) \times \overrightarrow{\beta}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}\right)$$

**Άσκηση 9.** Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε ανά δύο έχουν ίσες γωνίες. Θεωρούμε τα μη-μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{\lambda} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}$ και $\overrightarrow{\mu} = (\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}) \times (\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\gamma})$. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\overrightarrow{\lambda}$ και $\overrightarrow{\mu}$ είναι μεταξύ τους παράλληλα.

**Άσκηση 10.** Να αναλυθεί το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha} = (4, -5, 3)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να έχει την διεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{\beta} = (-2, 3, 1)$.

**Άσκηση 11.** Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1, 2), B(2, 3), \Gamma(-4, 3)$.

**Άσκηση 12.** Να δείξετε ότι τα σημεία $A(3, 1, 1), B(1, 1, 1), \Gamma(1, 3, 5)$ ορίζουν ορθογώνιο τρίγωνο. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τις γωνίες και τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

**Άσκηση 13.** Θεωρούμε τα μοναδιαία διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $(\widehat{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}}) = \dfrac{\pi}{4}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με διαγωνίους τα διανύσματα $\overrightarrow{x} = 7\overrightarrow{\alpha} - 3\overrightarrow{\beta}$ και $\overrightarrow{y} = -3\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$.

**Άσκηση 14.** Δίνονται τα σημεία $A(1, 1, 1), B(0, 0, 1), \Gamma(3, 3, 0)$ και $\Delta(1, 0, 0)$.

$\alpha)$ Να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A, B, \Gamma$ ορίζουν τρίγωνο, του οποίου να προσδιορίσετε το εμβαδό.

$\beta)$ Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{B}\Delta$.

**Άσκηση 15.** Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, για τα οποία γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{\alpha} \| \overrightarrow{\gamma}$ και $\overrightarrow{\gamma} \neq \overrightarrow{0}$. Επιπλέον, θεωρούμε διάνυσμα $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{\gamma}$ και επαληθεύει τη σχέση

$$\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma} \times \overrightarrow{x}.$$

Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{x}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$.

Να γίνει εφαρμογή με τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (1, 0, 1), \overrightarrow{\beta} = (0, 1, 1), \overrightarrow{\gamma} = (3, 0, 3)$.

**Άσκηση 16.** Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in \mathbb{R}^3$ είναι γνωστά, να λυθεί ως προς το διάνυσμα $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, η (διανυσματική) εξίσωση:

$$\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{x}$$

**Άσκηση 17.** Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν $< \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} > \neq 0$ και $< \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\gamma} > = 0$, να προσδιοριστεί διάνυσμα $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε:

$$\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\gamma} \text{ και } < \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{u} > = \lambda$$

Εφόσον κάνετε την επαλήθευση, στη συνέχεια να γίνει εφαρμογή για $\overrightarrow{\alpha} = (1, 2, 1), \overrightarrow{\beta} = (-1, 4, 2), \overrightarrow{\gamma} = (3, 1, -5)$ και $\lambda = 5$.